Actes de la XXI Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament. Barcelona, SCHCT-IEC
Ferragud, C.; Massa-Esteve, M. R. (ed.) (2025) p. 70-76
DOI: 10.2436/10.2006.06.7

EL ARENARIO DE ARQUÍMEDES

JUAN NAVARRO LOIDI
CÁTEDRA SÁNCHEZ MAZAS (UPV-EHU)

Resumen: El arenario *es un texto breve escrito por Arquímedes en el que explica cómo se puede expresar el número de granos de arena que llenarían el mundo. Su razonamiento le lleva a plantearse cómo es el cosmos, cómo se pueden denotar grandes cantidades y cómo operar con ellas utilizando el antiguo sistema numérico de los griegos, para acabar calculando la cantidad buscada. Este texto de Arquímedes puede utilizarse en clase para introducir sistemas de numeración, notación científica y los diferentes sistemas que han existido para describir el cosmos.*

Palabras clave: *Aritmética, sistemas de numeración, notación científica, cosmología, matemáticas en la antigua Grecia.*

L'arenari d'Arquimedes

Resum: L'arenari *és un text breu escrit per Arquimedes en el qual explica com es pot expressar el nombre de grans d'arena que omplirien el món. El seu raonament el porta a plantejar-se com és el cosmos, com es poden denotar grans quantitats i com operar amb elles utilitzant l'antic sistema numèric dels grecs, per acabar calculant la quantitat buscada. El text d'Arquímedes es pot utilitzar a classe per introduir sistemes de numeració, notació científica i els diferents sistemes que han existit per descriure el cosmos.*

Paraules clau: *Aritmètica, sistemes de numeració, notació científica, cosmologia, matemàtiques a l'antiga Grècia.*

Archimedes' *Sand-Reckoner*

Summary: The Sand-Reckoner *is a short text written by Archimedes in which he explains how can be expressed the number of grains of sand that would fill the world. His reasoning leads him to consider what the cosmos is like, how can be denoted large quantities, and how operate with them using the old numerical system of the Greeks, to end up calculating the quantity sought. Archimedes' text can be used in class to introduce numbering systems, scientific notation and the different systems that have existed to describe the cosmos.*

Keywords: *Arithmetic, numeral systems, scientific notation, cosmology, mathematics in ancient Greece.*

Introducción

El texto que se va a comentar, *El arenario*, trata de aritmética y de astronomía, mientras que la mayoría de las obras de Arquímedes (Siracusa *ca*. 287 a. C. - *ca*. 212 a. C.)[1] que se conservan tratan fundamentalmente de sus descubrimientos en geometría o mecánica. Pero es un escrito que puede ser útil en clase porque introduce también cuestiones de geometría y de historia, y es una buena base para proponer situaciones de aprendizaje pluridisciplinar.

El arenario es una carta de Arquímedes a Gelón II rey de Siracusa, en la que plantea:

> Creen algunos, ¡Oh rey Gelón!, que el número de los granos de arena es infinito […] Hay otros que juzgan no ser infinito su número, pero dicen que es imposible asignarle ninguno determinado […/…] Mas comprenderás que […] hay algunos [números] que no solo exceden al de los granos de arena que contendría toda la Tierra, sino también al de los que pudiera contener el Mundo entero (Vera, 1970: 204-205).

Para demostrar que se pueden hallar números mayores al que indicaría el número de granos de arena que llenarían el cosmos, Arquímedes plantea previamente:

1. Cómo es el universo.
2. Cuáles son sus dimensiones.
3. Cómo se pueden expresar los grandes números.
4. Cómo se puede calcular con ellos.

Para acabar encontrando un número que supera la cantidad de granos de arena que llenarían el universo.

Cómo es el universo y cuáles son sus dimensiones

Arquímedes da dos opciones sobre la composición del cosmos. En las dos el mundo es esférico, pero mientras que en una el mundo tiene por centro la Tierra y por radio la distancia de esta al Sol, en la otra, defendida por Aristarco, el centro es el Sol, la Tierra gira alrededor de él y el mundo es más grande.

Estas informaciones pueden servir para plantear varios temas en clase. Por ejemplo: ¿Por qué se preconizó que la Tierra es el centro del universo? ¿Cómo se cree ahora que es el mundo?

Dada la forma del universo, Arquímedes se plantea determinar sus dimensiones y lo hace de forma escalonada. Es importante tener en cuenta que Arquímedes no busca el número exacto de granos de arena que caben en el universo, sino demostrar que hay números mayores a esa cantidad. Por eso, en caso de duda, escoge el mayor valor y, si la cantidad no es redonda, toma una aproximación por exceso que facilite los cálculos.

1. Diámetro de la Tierra

Arquímedes propone como longitud del perímetro de la Tierra 300 miríadas de estadios.[2] Dice que

1. Sobre Arquímedes: Babini (1948), Dijksterhuis (1987), Strathern (1999) o Heath (2002).

2. Una miríada griega eran 10.000 unidades. Un estadio griego venía a ser unos 160 m. Su valor varió según la ciudad y la época considerada.

muchos autores consideraban que es diez veces menor, pero que él escoge esa cantidad por ser la mayor de las que se barajaban. Sobre esta cuestión se puede preguntar cuál es la longitud de un meridiano o explicar la medida del meridiano realizada por Eratóstenes.

Conocida la longitud del perímetro de la Tierra calcula su diámetro. Para ello divide la longitud de la circunferencia entre la constante π. Arquímedes toma para π el valor 3 y obtiene para el diámetro de la Tierra 100 miríadas de estadios.[3] Se puede comentar que Arquímedes había obtenido la desigualdad $\frac{220}{71} < \pi < \frac{22}{7}$, pero no la utiliza para facilitar los cálculos posteriores.

2. Diámetro del Sol

Arquímedes explica que su padre, Fidias, opinaba que el diámetro del Sol es 12 veces el de la Luna, que Eudoxo decía que 9, y que Aristarco creía que está entre 18 y 20 veces el de la Luna. Él considera que el diámetro del Sol es 30 veces el de la Luna, tomando así una cantidad mayor a todas ellas. Además, como conoce el diámetro de la Tierra, y se sabía que es mayor al de la Luna, va a tomar que el diámetro del Sol es 30 veces el de la Tierra, es decir, 3.000 miríadas de estadios.[4]

3. El diámetro del cosmos geocéntrico

Arquímedes afirma que el diámetro del Sol es mayor que el lado de un polígono regular de mil lados inscrito en un círculo máximo de la esfera en la que estaban las estrellas y el Sol, límite del cosmos geocéntrico. Lo justifica diciendo que había realizado un experimento en el que había obtenido que el diámetro del Sol es mayor al lado del polígono regular de ochocientos lados y menor al del polígono de seiscientos cincuenta y seis lados inscritos en la mencionada circunferencia. Explica su experimento y discute sobre su precisión, dedicando bastante espacio a justificar geométricamente sus resultados.

Como en los cálculos anteriores redondea lo obtenido y supone que la circunferencia de las estrellas fijas es menor a 1.000 diámetros del Sol, es decir, que su longitud es menor que 30.000 diámetros de la Tierra. Tomando $\pi = 3$ de nuevo, deduce que el diámetro del cosmos es menor a una miríada de veces el diámetro de la Tierra, es decir, menor que 100 miríadas de miríadas de estadios.

4. Diámetro del cosmos de Aristarco

Según Arquímedes, Aristarco decía que el diámetro de la Tierra es a su distancia al Sol como su distancia al Sol es al diámetro del mundo, es decir, al de la esfera donde están las estrellas en la hipótesis heliocéntrica. Ha obtenido antes que el diámetro del cosmos geocéntrico es menor a una miríada de veces el diámetro de la Tierra, luego el diámetro del mundo de Aristarco sería menor a 100 miríadas de miríadas de miríadas de estadios.

Estos cálculos pueden servir para introducir una discusión sobre lo que ahora se sabe sobre la dimensión del universo, los años luz, o el Big Bang.

3. Es decir 480.000 km para el meridiano y 160.000 para el diámetro, ahora se dan 40.000 km para un meridiano, y 12.732 km de diámetro, aproximadamente.

4. Es decir 4.800.000 km, ahora se piensa que son unos 1.392.000 km.

Cómo denominar y escribir grandes números

En el lenguaje habitual suele haber problemas para enunciar grandes números, como los billones, que se superan escribiendo sus expresiones simbólicas, 10^{12}. En la antigua Grecia la cuestión era más complicada porque además de tener problemas para enunciar grandes cantidades, los tenían para escribirlas porque utilizaban un sistema de numeración bastante más torpe que el sistema decimal actual.

Hasta el siglo IV a. C. predominó entre los griegos el sistema dórico, que era similar al romano. Posteriormente se utilizó el sistema jónico, que era el que prevalecía en tiempos de Arquímedes. Era un sistema aditivo no posicional que usaba 27 letras, una para cada unidad, decena o centena. No había un símbolo para el cero. Puestas juntas el número que indicaban era la suma de sus valores. Los símbolos utilizados, junto con su valor, se pueden ver en la fig. 1:

Αα	Ββ	Γγ	Δδ	Εε	Ϛϛ	Ζζ	Ηη	Θθ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ιι	Κκ	Λλ	Μμ	Νν	Ξξ	Οο	Ππ	Ϙϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
Ρρ	Σσ	Ττ	Υυ	Φφ	Χχ	Ψψ	Ωω	Ϡϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

FIGURA 1: Símbolos de la numeración jónica.
FUENTE: Cayetano (s.f.).

Si se ponía una coma a la izquierda de una cifra su valor aumentaba 1.000 veces. Por ejemplo, β indicaba el número 2 y ,β indicaba el número 2.000. Con estos símbolos podía escribirse hasta el 9.999 = ,θϡϙθ . Para el diez mil se usaba el término «miríada» y el símbolo M, y para números mayores no había una regla generalizada (Ifrah, 2001: 548-550). Aristarco de Samos, por ejemplo, al dar la distancia de la Tierra al Sol, escribe 711.755.875 como 'ZPOEM 'EΩOE descomponiéndolo como 'ZPOEM=7.175·10.000 y 'EΩOE=5.875. Apolonio de Perga, por su parte, escribía el número de miríadas encima de la M.

La propuesta de Arquímedes para designar grandes números

Para resolver las dificultades creadas por los grandes números en *El arenario*, Arquímedes propone una forma de denominarlos similar, pero más completa, que nuestros billones, trillones y cuatrillones, que consiste en clasificar los números en periodos y dentro de cada periodo, en órdenes.

Como se ha visto, la antigua notación griega permitía escribir números hasta una miríada, y se podía generalizar hasta una miríada de miríadas. Estos números para Arquímedes son los números primeros del primer periodo, que serían, en notación decimal, del 1 al 9.999.999 (de 1 a 10^8-1 con exponentes).

Cien millones, 10^8, lo considera la unidad de los números segundos del primer periodo, que llegan hasta una miríada de miríadas de esa unidad, es decir, el último número segundo es $10^8 \cdot 10^8$-1. Estos números forman el segundo orden del primer periodo.

Con escritura exponencial, $10^{8\cdot 2}$ sería la unidad del tercer orden y el último número de dicho orden sería $10^{8\cdot 2} \cdot 10^8$-1. La unidad del cuarto orden era $10^{8\cdot 3}$, y así seguía definiendo órdenes sucesivos hasta tener una miríada de miríadas de órdenes en el primer periodo, que termina con $10^{8\cdot 10^8} - 1$.

La cantidad P = $10^{8\cdot 10^8}$ es la unidad del primer orden del segundo período. Siguiendo el mismo esquema que en el primer periodo, la unidad del segundo orden del segundo periodo es $P\cdot 10^8 = 10^{8\cdot(10^8+1)}$ y la unidad del tercer orden del segundo periodo es $10^{8\cdot(10^8+2)}$. De esa forma, Arquímedes define de nuevo una miríada de órdenes en el segundo periodo y sigue con un tercer periodo que tiene por unidad $10^{8\cdot 2\cdot 10^8}$ y luego con un cuarto periodo que empieza en $10^{8\cdot 3\cdot 10^8}$. Este proceso lo sigue hasta definir 10^8 periodos, llegando hasta $10^{8\cdot 10^{16}}$ utilizando exponentes, porque de no usarlos habría que escribir un uno seguido de ochenta mil billones de ceros.

Esta cuestión puede servir para repasar el sistema decimal de numeración e introducir la notación científica.

Cómo se opera con grandes números

El sistema de numeración jónico era muy deficiente para operar por escrito. En la antigua Grecia las operaciones se hacían con ábacos, no escribiendo. Para encontrar un número superior a los granos de arena que caben en el universo, Arquímedes emplea la proporcionalidad entre esferas, por lo que, finalmente, solo necesita efectuar productos. En consecuencia, le basta con idear un método que permita calcular fácilmente productos de grandes números. Además, como busca un número mayor al número de granos de arena que caben en el universo, y no su número exacto, solo va a emplear números redondos para facilitar el cálculo. En esas condiciones, define una progresión geométrica de razón 10 y primer término 1: 1, 10, 10^2… Si llamamos A_1, A_2, A_3 … a los términos de esa progresión, Arquímedes demuestra que $\frac{A_n}{A_1} = \frac{A_{m+n-1}}{A_m}$ y por lo tanto $A_m \cdot A_n = A_{m+n-1} \cdot A_1 = A_{m+n-1} \cdot 1 = A_{m+n-1}$. Por consiguiente, el producto de dos elementos de la progresión es el elemento que está en la posición suma de los lugares de los factores menos uno,[5] y con esta regla los productos se convierten en desplazamientos entre los términos de la progresión.

Se puede relacionar este método de Arquímedes con la definición de los logaritmos decimales, porque establece una correspondencia entre la progresión geométrica de potencias de 10 y la aritmética de sus exponentes, aunque Arquímedes hace corresponder al 1, primer término de la progresión geométrica, el valor 1 y no el cero como en los logaritmos decimales.

Cálculo del número de granos de arena que caben en el mundo

Para hallar un número que supere al número de granos de arena que entrarían en el mundo, Arquímedes comienza por postular que en una semilla de amapola entran menos de una miríada de granos de arena y que cuarenta semillas de amapola alineadas miden algo más de un dedo, de donde deduce que el diámetro de una semilla no es menor que 1/40 de dedo. Por otra parte, recuerda que el volumen de las esferas es proporcional al cubo de sus diámetros.

De esos datos y aplicando dicha proporcionalidad, deduce que una esfera de un dedo de diámetro tendría menos de cuarenta al cubo miríadas de granos de arena, es decir, 640.000.000 granos. Para simplificar los cálculos dice que serían menos de 1.000.000.000, es decir, diez miríadas de miríadas o diez números del segundo orden del primer período, que es el término décimo, A_{10} o 10^9, de la progresión que había definido antes.

5. Con la notación exponencial $10^{m-1}\cdot 10^{n-1} = 10^{m+n-2}$ siendo $10^{n-1} = A_n$ y $10^{m-1} = A_m$ y el resultado A_{m+n+1}.

En una esfera de 100 dedos entrarán cien al cubo veces los granos que entran en una esfera de un dedo, es decir, 1.000.000 veces los granos que entran en la de un dedo. Un millón corresponde al término A_7 de la progresión, y utilizando la regla obtenida para el producto entre términos de la progresión, obtiene que $A_7 \cdot A_{10} = A_{7+10-1} = A_{16}$. El término 16 de la progresión es mil miríadas de números segundos. Con los procedimientos actuales trabajando con potencias estos cálculos son triviales: $10^9 \cdot 10^6 = 10^{15}$. Pero sin la facilidad de nuestra notación no era tan sencillo, Arquímedes, en *El arenario*, expone verbalmente todo este proceso y se alarga mucho.[6]

Sigue con una esfera de una miríada de dedos de diámetro, que tiene un diámetro cien veces mayor a la de cien dedos, por lo tanto, la cantidad de granos de la nueva esfera debe ser un millón de veces mayor al de la anterior. Esas cantidades son los términos A_7 y A_{16} de la progresión, y el resultado de su producto es el término A_{22}, diez miríadas de números terceros.

Una esfera que tiene un estadio de diámetro es menor que una que tiene una miríada de dedos de diámetro, porque un estadio griego tenía 600 pies y un pie 16 dedos, por lo que un estadio tenía 9.600 dedos de largo, es decir, menos de 10.000 dedos. Luego si en una esfera mayor caben menos de diez miríadas de números terceros de granos de arena, en una esfera de un estadio de diámetro también cabrán menos de esa cantidad.

Arquímedes continúa el cálculo con estadios. Una esfera de 100 estadios tendría cien miríadas de veces, A_7, los granos que tendría la de un estadio, que son diez miríadas de números terceros, A_{22}, por lo que tendría menos del término 28 de la progresión, mil números cuartos de granos de arena. De la misma forma, obtiene que una esfera de una miríada de estadios de diámetro tendría menos de diez números quintos de granos de arena que una de cien miríadas de estadios menos de mil miríadas de números quintos, y una de una miríada de miríadas de estadios de diámetro, menos que diez miríadas de números sextos. Finalmente, para cien miríadas de miríadas de estadios de diámetro, entrarían menos de mil números séptimos de granos de arena [$A_7 \cdot A_{46} = A_{52}$ ó $10^6 \cdot 10^{45} = 10^{51}$]. Pero había obtenido que el diámetro del cosmos geocéntrico es menor que cien miríadas de miríadas de estadios, luego el número de granos de arena que entrarían en el cosmos sería menos de mil números séptimos. Es decir, con la notación decimal, un 1 seguido de 51 ceros.

Añade Arquímedes que, en el caso de que el universo fuera como proponía Aristarco, su diámetro sería una miríada de veces mayor al del cosmos geocéntrico. Luego su volumen sería una miríada de miríadas de miríadas de veces el volumen anterior y el número de granos que entrarían serían menos de una miríada de miríadas de miríadas de veces mil números séptimos de granos de arena [$10^{12} \cdot 10^{51} = 10^{63}$], es decir, tendría menos de mil miríadas de números octavos de granos de arena, que en cifras decimales se escribiría como el 1 seguido de 63 ceros.

Para acabar, se podría proponer hacer ese cálculo con los datos actuales. Supuesto el radio del mundo igual al del mundo observable, esto es $R \approx 4{,}4 \cdot 10^{26}$ metros y la densidad de los granos de arena: $8 \cdot 10^9$ granos/m^3, se tendría que el volumen del mundo conocido $\approx 3{,}45 \cdot 10^{80}$ m^3 y el número de granos de arena $\approx 2{,}76 \cdot 10^{90}$. Mayor cantidad que la encontrada por Arquímedes, pero también numerable.

6. En Peyrard (1807: 357-367) son 10 páginas de las 19 que abarca todo el texto. En Vera (1970: 216-217) o Heath (2002: 230-232) son solo dos o tres porque lo abrevian y usan notación moderna.

Referencias bibliográficas

BABINI, José (1948). *Arquímedes*. 2ª ed. Buenos Aires: Espasa Calpe.

CAYETANO, Javier (s. f.). *«Numeración griega jónica». Rincón didáctico matemáticas* [en línea]. Consejería de Educación y Empleo. Junta de Extremadura. <https://matematicas.educarex.es/index.php/numeros1eso/unidades-numeros-1eso/num-griego-jonico?s=09> [Consulta: 10 febrero 2024].

DIJKSTERHUIS, Eduard Jan (1987). *Archimedes*. Princeton: Princeton University Press.

HEATH, Thomas Little (2002). «The Sand-reckoner» (El Arenario). En: *The Works of Archimedes*. New York: Dover Publications, p. 221-232.

IFRAH, Georges (2001). *Historia universal de las cifras*. 4ª ed. Madrid: Espasa Calpe.

PEYRARD François (1807). «L'Arénaire». En: *Oeuvres d'Archimède*. París: François Buisson, p. 348-367.

STRATHERN, Paul (1999). Arquímedes y la palanca. Madrid: Siglo Veintiuno.

VERA, Francisco (1970). «El Arenario». En: *Científicos Griegos*. Vol. 2. Madrid: Aguilar, p. 204-217.